TD3

Exercice 1. Soit V l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ et à valeurs complexes, pour $f \in V$, on pose

$$\|f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)|, \qquad \|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

- Montrer que $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont des normes sur V.
- Vérifier que $\|f\|_2 \leq \|f\|_1$ mais que cependant ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 2. Soit V l'espace des fonctions à valeurs complexes, définies et continues sur l'intervalle $[0,1]$.

- Montrer que si f appartient à V, l'application

$$f \mapsto \int_0^1 |f(x)|dx$$

  définit une norme sur V.
- On considère la suite de fonctions f_n telles que

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x < 1/n^2, \\ 1/\sqrt{x} & \text{si } 1/n^2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

  La suite f_n est-elle une suite de Cauchy? L'espace V est-il complet?

Exercice 3. Soit $L^2(0,1)$ l'espace vectoriel complexe des fonctions f de carré intégrable sur $[0,1]$. On considère le sous-espace vectoriel de $L^2(0,1)$ constitué de l'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$.

Montrer que cet espace n'est pas complet (au sens de la convergence en moyenne quadratique).
Indication: On pourra considérer la suite f_n:

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n^3, \\ x^{-1/3} & \text{si } 1/n^3 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Exercice 4. Montrer que l'espace ℓ^2 est complet.

Corrigé

1.
   - Comme $|f(t)| \geq 0$, il est clair que $\|f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)| \geq 0$ (axiome 1). En plus, $\|f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)| = 0$ seulement $f(t)$ s'annule sur $[0,1]$ (axiome 2). L'axiome 3 est aussi satisfaite car

     $$\|\lambda f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]}|\lambda f(t)| = \sup_{t\in[0,1]}|\lambda|\,|f(t)| = |\lambda| \sup_{t\in[0,1]}|f(t)| = |\lambda|\,\|f\|_1.$$

     Finalement, vérifions l'inégalité triangulaire (axiome 4):

     $$\|f+g\|_1 = \sup_{t\in[0,1]}|f(t)+g(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]}\left(|f(t)|+|g(t)|\right) =$$

     $$= \sup_{t\in[0,1]}|f(t)| + \sup_{t\in[0,1]}|g(t)| = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

     La démonstration pour $\|\ \|_2$ est analogue:

     $$\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \int_0^1 |f(t)|dt = |\lambda|\,\|f\|_2,$$

     $$\|f+g\|_2 = \int_0^1 |f(t)+g(t)|dt \leq \int_0^1 |f(t)|dt + \int_0^1 |g(t)|dt = \|f\|_2 + \|g\|_2,$$

     il est clair que $\|f\|_2 \geq 0$,

     $\|f\|_2 = 0 \Longrightarrow f = 0$ car la fonction $|f|$ est continue positive sur $[0,1]$.

   - On a

     $$\|f\|_2 = \int_0^1 |f(t)|dt \leq \int_0^1 \sup_{u\in[0,1]}|f(u)|dt = \sup_{u\in[0,1]}|f(u)| \int_0^1 dt =$$

     $$= \sup_{u\in[0,1]}|f(u)| = \|f\|_1.$$

     Considérons la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset V$ définie par $f_n(t) = t^n$, nous avons

     $$\begin{aligned} \|f\|_1 &= 1, \\ \|f\|_2 &= \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

     ce qui montre qu'il n'existe pas de constante strictement positive C telle que

     $$\|f\|_1 \leq C\|f\|_2 \qquad \forall f \in V.$$

2.
   - voir Ex. 1.
   - La suite $\{f_n\}$ est de Cauchy car nous pouvons écrire pour $n \geq m$:

     $$\|f_n - f_m\| = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|dx =$$

     $$= \int_0^{1/n^2} (n-m)dx + \int_{1/n^2}^{1/m^2} \left\{\frac{1}{\sqrt{x}} - m\right\} dx =$$

$$= (n-m)\,\frac{1}{n^2} + \frac{2}{m} - \frac{1}{m} - \frac{2}{n} + \frac{m}{n^2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \|f_n - f_m\| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|.$$

Montrons maintenant que cette suite ne converge pas dans V, ce qui nous permettra de conclure que V n'est pas complet. Nous avons dans $L^1([0,1])$ muni de la norme $f \mapsto \|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$:

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - \frac{1}{\sqrt{x}}\| = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/n^2} \left|n - \frac{1}{\sqrt{x}}\right| dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{1/n^2} \left\{\frac{1}{\sqrt{x}} - n\right\} dx =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

ce qui montre que la fonction $f(x) = 1/\sqrt{x} \in L^1([0,1])$ est point d'adhérence de la suite $\{f_n\}$. Cependant comme f n'est pas continue, elle n'appartient pas à V et la suite $\{f_n\}$ n'admet pas de limite dans V.

3. On peut utiliser la même approche que dans l'Ex. 2. Montrons d'abord que la suite $\{f_n\}$ est de Cauchy. Effectivement, pour $n > m$ on a

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \int_0^1 (f_n(x) - f_m(x))^2 dx =$$
$$= \int_0^{1/n^3} (n-m)^2 dx + \int_{1/n^3}^{1/m^3} \left(x^{-1/3} - m\right)^2 dx + \int_{1/m^3}^1 0 \cdot dx =$$
$$= (n-m)^2 x\Big|_0^{1/n^3} + \left(3x^{1/3} - 3mx^{2/3} + m^2 x\right)\Big|_{1/n^3}^{1/m^3} = (\text{calcul}) =$$
$$= -\frac{2}{n} + \frac{1}{m} + \frac{m}{n^2} \le -\frac{2}{n} + \frac{1}{m} + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \to 0 \text{ quand } m, n \to \infty.$$

Par la suite on vérifie que $\{f_n\}$ converge (par rapport à la norme quadratique) à la fonction $f(x) = x^{-1/3}$. Nous avons

$$\|f_n - f\|^2 = \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|^2 dx = \int_0^{1/n^3} \left(x^{-1/3} - n\right)^2 dx =$$
$$= \left(3x^{1/3} - 3nx^{2/3} + n^2 x\right)\Big|_0^{1/n^3} = \frac{1}{n} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

Par contre $f(x)$ n'est pas continue sur $[0,1]$, donc on a construit une suite de Cauchy qui ne converge pas vers un élément de l'espace en question. Par conséquent, cet espace n'est pas complet.

4. La démonstration peut être trouvée dans R. D. Richtmyer, *Principles of Advanced Mathematical Physics*, Vol. 1, section 1.4.